

例:  $A=BC$  其中  $B$  列满秩,  $A$  行满秩

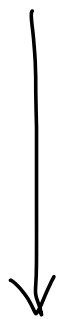
例:  $\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n$

例:  $A^2 = A \in F^{n \times n} \Rightarrow \text{rank}(A) + \text{rank}(I - A) = n$

例:  $A \in F^{m \times n}$   $B \in F^{n \times m}$

$$m + \text{rank}(I_n - BA) = \text{rank} \begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = n + \text{rank}(I_m - AB).$$

线性方程



矩阵 | 行列式

1. 解存在唯一性
2. 求解算法
3. 解析解
4. 标准型非零计数的唯一性
5. 解集的几何结构.

1. 解的存在唯一性.

$$Ax=b \quad A \in F^{m \times n} \quad x \in F^n \quad b \in F^m$$

$$P(A,b) = J = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & & & & d_1 \\ & a_{12} & & & \vdots \\ & & \dots & & \\ & & & a_{jr} & d_r \\ & & & & \vdots \\ & & & & d_m \end{array} \right)$$

$$r(A) = r(J) = r$$

$\tilde{J}$

$$r(A,b) = r(J) = \begin{cases} r & d_{r+1} = 0 \\ r+1 & d_{r+1} \neq 0 \end{cases}$$

$$Ax=b \text{ 有解} \Leftrightarrow d_{r+1} = 0 \Leftrightarrow r(A,b) = r(A)$$

$$Ax=b \text{ 解唯一} \Leftrightarrow \begin{cases} r=n \\ d_m=0 \end{cases} \Leftrightarrow r(A,b) = r(A) = n$$

$$Ax=0 \text{ 有非零解} \Leftrightarrow r < n \Leftrightarrow \text{rank}(A) < n.$$

$$Ax=0 \text{ 只有零解} \Leftrightarrow r(A) = n$$

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

↑  
A 列满秩

2. Gauss 消元法  $\rightarrow$  初等变换  $\rightarrow$  乘初等阵

3. 公式解 (Cramer 法则)

4. 标准型中非零个数  $\rightarrow$  rank(A)

② 5. ?

## § 数组空间及其子空间

$$\text{空间} \xrightarrow{\text{坐标}} \mathbb{R}^3 \longrightarrow F^n$$

定义:  $F$  为数域. 带线性运算的  $n$  维向量全体

$$\{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in F\}$$

称为  $n$  维数组空间. 记为  $F^n$ .

线性组合, 组合系数, 线性表示

$$V = \{ \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \in F \} =: \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \vec{b}_1, \vec{b}_2 \in V \Rightarrow \vec{b}_1 + \vec{b}_2 \in V \\ (2) \vec{b} \in V, \lambda \in F \Rightarrow \lambda \vec{b} \in V \end{array} \right\}$$

$$\forall \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \in V, \forall \mu_1, \dots, \mu_n \in F \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{b}_i \in V$$

定义: 设  $V \subset F^n$  为非空向量集合, 它满足:

$$\forall \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i \in V$$

则称  $V$  为  $F^n$  的子空间.

例: (1) 平凡子空间  $V = \{0\}$  以及  $V = F^n$ .

(2)  $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \rangle$  是由  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in F^n$  生成的子空间.

(3) 三维空间  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  不共面

$$\langle \vec{a} \rangle, \quad \leftrightarrow$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \quad \leftrightarrow$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \quad \leftrightarrow$$

$$(4) \quad AX = b \Leftrightarrow (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle$$

(5)  $S_3 \Rightarrow$  齐次线性方程组的通解:

$$\vec{x} = t_1 \vec{\alpha}_1 + t_2 \vec{\alpha}_2 + \dots + t_{n-r} \vec{\alpha}_{n-r}$$

$\Rightarrow$  解空间为  $\langle \vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{n-r} \rangle$  为  $F^n$  的一个子空间.