例：$A=BC$ 其中 B 列满秩，A 行满秩

例：$\operatorname{rank}(AB) \geqslant \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n$

例：$A^2 = A \in F^{n\times n} \Rightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I-A) = n$

例：$A \in F^{m\times n}$ $B \in F^{n\times m}$

$$m + \operatorname{rank}(I_n - BA) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = n + \operatorname{rank}(I_m - AB).$$

线性方程
1. 解存在唯一性
2. 求解算法
3. 解析解
4. 标准型非零行数的唯一性
5. 解集的几何结构.

↓

| 矩阵 | 行列式 |

1 解的存在唯一性.

$$Ax=b \qquad A\in F^{m\times n} \quad x\in F^{n} \quad b\in F^{m}$$

$$P(A,b) = J = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} c_1 & & & \\ & c_{1j_2} & & \\ & & \cdots & \\ & & & c_{rj_r} \end{matrix}}_{\tilde{J}} & \begin{matrix} d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{r+1} \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$r(A) = r(\tilde{J}) = r$$

$$r(A,b) = r(J) = \begin{cases} r & d_{r+1}=0 \\ r+1 & d_{r+1}\neq 0 \end{cases}$$

$Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow d_{r+1}=0 \Leftrightarrow r(A,b)=r(A)$

$Ax=b$ 解唯一 $\Leftrightarrow \begin{cases} r=n \\ d_{r+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow r(A,b)=r(A)=n$

$Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r<n \Leftrightarrow rank(A)<n$.

$Ax=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow r(A)=n$

$$AB = AC \underset{\uparrow}{\Rightarrow} B=C$$

A列满秩

2 Gauss消元法 → 初等变换 → 求初等阵

3. 公式解 (Cramer法则)

4. 标准型中非零计数 → rank(A)

② 5. ?.

§ 数组空间及其子空间

$$\text{空间} \xrightarrow{\text{坐标}} \mathbb{R}^3 \longrightarrow F^n$$

定义：F为数域．带线性运算的n维向量全体

$$\{(a_1,\cdots,a_n) \mid a_i\in F\}$$

称为 n维数组空间．记为F^n.

线性组合、组合系数，线性表示

$$V=\left\{\lambda_1\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\cdots+\lambda_m\vec{a_m} \,\middle|\, \lambda_1,\cdots,\lambda_m\in F\right\}=:\langle\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_m}\rangle$$

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \vec{b_1},\vec{b_2}\in V \Rightarrow \vec{b_1}+\vec{b_2}\in V\\ &(2)\quad \vec{b}\in V,\ \lambda\in F \Rightarrow \lambda\vec{b}\in V\end{aligned}\right\}$$

$$\forall\ \vec{b_1},\cdots,\vec{b_n}\in V,\ \forall\mu_1,\cdots,\mu_n\in F \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\mu_i\vec{b_i}\in V$$

定义：设 $V\subset F^n$为非空向量集合，它满足：

$$\forall\ \vec{a_1},\cdots,\vec{a_n}\in V,\ \forall\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in F \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a_i}\in V$$

则称 V 为 F^n 的子空间．

例：(1) 平凡子空间　$V=\{0\}$ 以及 $V=F^n$.

(2) $\langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle$ 是由 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \in F^n$ 生成的子空间.

(3) 三维空间 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面

$\langle a \rangle, \quad \longleftrightarrow$

$\langle a, b \rangle \quad \longleftrightarrow$

$\langle a, b, c \rangle \quad \longleftrightarrow$

(4) $Ax=b \Leftrightarrow (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \in \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \rangle$$

(5) §3 $\Rightarrow$ 齐次线性方程组的通解：

$$\vec{x} = t_1\vec{\alpha}_1 + t_2\vec{\alpha}_2 + \cdots + t_{n-r}\vec{\alpha}_{n-r}$$

$\Rightarrow$ 解空间为 $\langle \vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_{n-r} \rangle$ 为 F^n 的一个子空间.